数理解析研究所講究録
第 1571 巻 2007 年 18-22

Fixed-point property for CAT(0) spaces

近藤 剛史
京都大学理学研究科

1 Introduction

有限生成群 Γ に対して, Γ の距離空間 Y への任意の等長作用が固定点を持つとき, Γ が Y に対する固定点性質を持つといい FY と書く. 同様に, 距離空間のクラス $\mathcal{Y}$ に対しての固定点性質とは, 任意の $Y\in\mathcal{Y}$ への任意の等長作用が固定点を持つこととし, $F\mathcal{Y}$ と書く. Kazhdan の Property(T) が Hilbert 空間に対する固定点性質と同値であることはよく知られた事実である [4, 2]. また, 群 Γ が Property(T) を持つことと, Γ の任意のユニタリー表現 π に対して $H^1(\Gamma,\pi)=0$ が成り立つことの同値性もよく知られていた.

Shalom は [8] の中でさらに, 群 Γ が Property(T) を持たないならば, あるユニタリー表現 π が存在して, 1 次の reduced cohomology $\overline{H}^1(\Gamma,\pi)$ が消えないことを示した. つまり, 通常の cohomology H^1 よりも小さい reduced cohomology $\overline{H}^1$ の消滅だけから Property(T) がしたがうということになる.

Shalom の証明は, 群の Hilbert 空間への等長作用と群上の negative definite function の対応という, Hirbert 空間ならではの手法を用いており, 幾何学的に何をしているのか見えにくいが, Gromov が [3] で述べているように, スケーリング極限の議論を使うことで幾何学的な別証明を与えることができる.

証明の大雑把な流れは次のようなものである. まず, 通常の cohomology H^1 の消滅と固定点を持たない作用の非存在が同値であること, reduced cohonology $\overline{H}^1$ の消滅は一様作用の非存在と同値であることを示す. 次に, Hirbert 空間への固定点を持たない作用があると, その作用を拡大していき, 極限空間に一様作用が作れることを示す.

Shalom の論文では, この後半の議論を厳密に実行する目的で negative definite function が使われたようであるが, 超極限の意味でのスケーリング極限を考えることにより Gromov は幾何学的な別証明を与えたのである.

本稿では, このスケーリング極限の議論を用いることである種の極限操作に関して閉じた距離空間の族 $\mathcal{Y}$ に対する固定点性質が, 有限生成群の成す空間 $\mathcal{G}_m$ の中で開集合を成すことがわかることを報告する. またこの定理の系として, Gromov の主張している ([3], p.117) ように, 固定点性質 $F\mathcal{Y}$ を持つ有限生成群は, ある固定点性質 $F\mathcal{Y}$ を持つ有限表示群の商になっていることが分かる.

Property(T) についてのサーベイとしては, [5], [1] がある.

2 marked group のなす空間 $\mathcal{G}_m$

定理の主張を述べるために，まず marked group のなす空間 $\mathcal{G}_m$ を導入する.

2 以上の自然数 $m \in \mathbf{N}$ を固定する. $\mathbf{F}_m$ を m 個の元で生成される自由群とする. Γ を有限生成群とし，S を m 個の元からなる生成元の集合とする. ただし，S には全順序が固定されているものとする. このとき，組 (Γ, S) を marked group を呼ぶ. また，二つの marked group $(\Gamma_1, S_1), (\Gamma_2, S_2)$ が同型であるとは，群の同型 $\varphi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ が存在して，その S_1 への制限 $\varphi|_{S_1}$ が S_1 から S_2 への順序を保つ全単射であることをいう.

ここで，$\mathcal{G}_m$ を marked group の同型類の成す集合とする. $\mathcal{G}_m$ は自由群 $\mathbf{F}_m$ の正規部分群全体と自然に同一視できる. 以下，この対応を用いて $\mathbf{F}_m$ の正規部分群を $\mathcal{G}_m$ の元と思う.

次に，二つの正規部分群 $N_1, N_2 \in \mathcal{G}_m$ に対して，その間の距離を，

$$v(N_1, N_2) := \sup\{R \in \mathbf{N} | N_1 \cap B_{\mathbf{F}_m}(R) = N_2 \cap B_{\mathbf{F}_m}(R)\}$$

を用いて，

$$\mathrm{dist}(N_1, N_2) := \exp(-v(N_1, N_2))$$

と定義する. ただし $B_{\mathbf{F}_m}(R)$ とは，自由群 $\mathbf{F}_m$ 中の，語距離に関する半径 R のボールを意味するものとする.

この距離によって，$\mathcal{G}_m$ はコンパクト距離空間となる. また，この距離は ultra-metric inequality

$$\mathrm{dist}(N_1, N_3) \leq \max\{\mathrm{dist}(N_1, N_2), \mathrm{dist}(N_2, N_3)\}$$

を満たしているので，$\mathcal{G}_m$ は全不連結であることが分かる.

群の性質が開 (または閉) であるとは，その性質を持つ marked group のなす集合が $\mathcal{G}_m$ の開集合 (または閉集合) をなすことと定義する.

Example 2.1. 開である性質として，アーベル群，有限群，巾零群，完全群，k 個の元で生成される群がある. アーベル群は閉でもあり，トーションを持たない群も閉である.

3 一様作用

一様作用の定義を与えて，定理の主張を述べよう.

Definition 3.1 (uniformity constant). marked group (Γ, S) とその距離空間 Y への作用に対して，点 $y \in Y$ での uniformity constant $\epsilon(y)$ を $\epsilon(y) = \max_{\gamma \in S} \mathrm{dist}(\gamma y, y)$ で定義する.

Definition 3.2 (一様作用). (Γ, S) の Y への等長作用が一様であるとは，正の数 $\epsilon > 0$ が存在して，任意の $y \in Y$ に対して $\epsilon(y) \geq \epsilon > 0$ が成り立つこと，言い換えると，$\inf_{y \in Y} \epsilon(y) > 0$ が成り立つこととする.

つまり, ただ固定される点がないだけでなく, すべての点が一定の移動距離を持つことを要求しているのである.

Theorem 3.3. $\mathcal{Y}$ を完備距離空間からなる集合で, スケーリングと *ultra-limit* で閉じているものとする. このとき, $\mathcal{Y}$ に対する固定点性質 $F\mathcal{Y}$ は開である. つまり, $F\mathcal{Y}$ を持つ群全体の集合は $\mathcal{G}_m$ の開集合をなす.

以下, 証明の概略を述べる.

marked group の列 (Γ_i, S_i) が (Γ, S) に収束しているとし, 各 (Γ_i, S_i) は空間 $Y_i \in \mathcal{Y}$ に固定点を持たずに作用しているとする.

このとき, 空間列 Y_i に適当に基点 y_i をとると, その近くに別の点 x_i が存在して, x_i を中心とするボールの上では作用が一様になるようにできることが分かる. この基点を使って, 基点つき空間列 (Y_i, x_i) の距離を $1/\epsilon(x_i)$ 倍したものを考え, その超極限を Y_∞ とすると, 極限の群 Γ はここに一様作用を持つことが分かる. したがって固定点を持たない作用を持つ群の極限も, また固定点を持たずに作用できるので, 固定点性質が開集合であることが証明できる.

Corollary 3.4 ([3], p.117). Γ を $\mathcal{Y}$ に対して固定点性質を持つ有限生成群とする. このとき, $\mathcal{Y}$ に対して固定点性質を持つ有限表示群 Γ_0 と, 全射準同型 $\Gamma_0 \to \Gamma$ が存在する.

4 CAT(0) 空間での例

井関-納谷によって導入された CAT(0) 空間の不変量 δ の定義を与え, δ の値がある定数 δ_0 以下であるような CAT(0) 空間の族 $\mathcal{Y}_{\leq\delta_0}$ が極限操作で閉じた空間族の例を与えることを述べる.

Definition 4.1 ([6]). Y を CAT(0) 空間とする. このとき,

$$\delta(Y) = \sup_{\mu} \inf_{\phi} \frac{\| \int_Y \phi d\mu \|^2}{\int_Y \|\phi\|^2 d\mu}$$

と定義する. ここで μ は Y 上の確率測度で有限個の点にのみ台を持つもの全体を動き, ϕ は, $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間としたとき, 1-Lipschitz 写像 $\phi : \mathrm{Supp}(\mu) \to \mathcal{H}$ であって, 任意の $y \in \mathrm{Supp}(\mu)$ に対して $\|\phi(y)\| = \mathrm{dist}_Y(y, \mathrm{bar}(\mu))$ を満たすもの全体に亘ってとるものとする. ただし $\mathrm{bar}(\mu)$ とは測度 μ の重心のこととする.

定義から即座に $\delta \in [0,1]$ が分かる. この不変量 δ は計算することが非常に難しく, 0 であることが分かっているものを除いては評価があるのみである [6].

Example 4.2. (1) Y を Hadamard 多様体, Hilbert 空間, tree のいずれかとすると, $\delta(Y) = 0$ となる.

(2) Y を building $PSL(3,\mathbf{Q}_p)/PSL(3,\mathbf{Z}_p)$ とすると,

$$\delta(Y) \geq \frac{(\sqrt{p}-1)^2}{2(p-\sqrt{p}+1)}.$$

$p=2$ のときは $\delta(Y) \leq 0.4122\ldots$.

$\delta(Y)$ については次が知られている.

Proposition 4.3. (1) CAT(0) 空間 Y 内の閉凸部分集合 $Y' \subset Y$ に対して $\delta(Y') \leq \delta(Y)$ が成り立つ.

(2) ふたつの CAT(0) 空間 Y, Y' に対して, $\delta(Y \times Y') = \max\{\delta(Y), \delta(Y')\}$ が成り立つ.

(3) (Y_n, d_n) を CAT(0) 空間の列, ω を N 上の non-principal ultrafilter とし, 超極限を $(Y_\omega, d_\omega) = \omega\text{-}\lim_n (Y_n, d_n)$ とおく. このとき

$$\delta(Y_\omega) \leq \omega\text{-}\lim_n \delta(Y_n)$$

が成り立つ [7, Proposition 3.2].

したがって, δ の値がある定数 δ_0 以下であるような CAT(0) 空間の族 $\mathcal{Y}_{\leq\delta_0}$ を考えると超極限で閉じているので, 固定点性質 $F\mathcal{Y}_{\leq\delta_0}$ は開であることが分かる.

参考文献

[1] B.Bekka, P.de la Harpe, A.Valette, *Kazhdan's Property(T)*, available at http://poncelet.sciences.univ-metz.fr/~bekka/

[2] P. Delorme, 1-*cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus de représentations*, Bull. Soc. Math. France 105 (1977), 281–336.

[3] M.Gromov, *Random walk in random groups*, GAFA, Geom. func. anal. 13 2003, No.1, 73–146.

[4] A. Guichardet *Sur la cohomologie des groupes topologiques. II.*, Bull. Sci. Math. (2) 96 (1972), 305–332.

[5] P.de la Harpe, A.Valette *La propriété* (T) *de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger)*, Astérisque No. 175 (1989).

[6] H. Izeki and S. Nayatani, *Combinatorial harmonic maps and discrete-group actions on Hadamard spaces*, Geometriae Dedicata 114, 147–188, (2005).

[7] H.Izeki, T.Kondo, S.Nayatani, *Fixed-Point Property of Random Groups*, preprint.

[8] Y.Shalom, *Rigidity of commensurators and irreducible lattices*, Invent. Math. 141 (2000), no. 1, 1–54.

[9] A.Valette, *Old and new about Property(T)*, London Mathematical Society Student Texts, 55, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.